INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin: $x_0 = 1, x_1 = 3$ şi $x_{n+2} = 2\cdot x_{n+1} + 3\cdot x_n, (\forall) n \geq 0.$

a) Demonstraţi că $x_n = 3^n, (\forall) n \in \mathbb{N}$;

b) Calculaţi $S = \sum_{k=0}^{2015} x_k$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c,$ cu $a\in\mathbb{R}^*, b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $5a + 4b + 6c = 0.$

a) Pentru $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, calculaţi expresia $E(a,b,c) = \alpha\cdot f(0) + \beta\cdot f(1) + \gamma\cdot f(2)$, grupând rezultatul după a,b şi c.

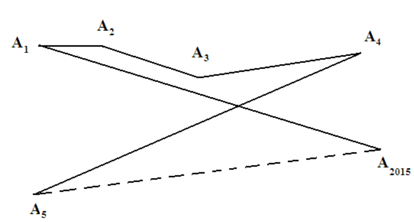
b) Demonstraţi faptul că există $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\infty)$ astfel încât $\alpha\cdot f(0) + \beta\cdot f(1) + \gamma\cdot f(2) = 0$.

c) Justificaţi existenţa unui punct $M_0(x_0,0)$ situat pe graficul funcţiei f cu proprietatea că $x_0\in[0,2]$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia: $x\cdot\left[2 + f(x) + f(-x)\right] + 2\cdot f(-x) = 0, (\forall) x\in\mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că *f* este funcţie impară.
b) Să se determine funcţiile care verifică relaţia de mai sus.

4. Într-un plan considerăm linia poligonală $\overline{A_1A_2A_3...A_{2015}}$, astfel încât începând cu al doilea segment, fiecare are lungimea de două ori mai mare decât a segmentului precedent. O insectă pleacă din punctul A_1, sărind succesiv în punctele A_2, A_3, A_4, …, A_{2015}. Este posibil ca după un număr finit de sărituri, insecta să se întoarcă în punctul A_1 ? $\left(\left|\overline{A_1A_{2015}}\right| = 2^{2014}\cdot l; l = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\right)$



Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil real, specializarea științele naturii

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. În planul complex, se consideră mulțimea $\mathcal{M}$ a punctelor $M(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, care au proprietatea că $\left|\sqrt{x^2+1}+i\sqrt{y-2}\right|=2$.

a) Determinați punctele care au ambele coordonate numere întregi şi care aparţin mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Reprezentați geometric mulțimea $\mathcal{M}$ într-un sistem cartezian xOy.

2. Să se rezolve ecuația: $\log_3\left(\log_2 x-9\right)=2+\log_3\left(1-4\log_x 4\right)$.

3. Determinaţi numerele întregi m pentru care graficul funcţiei

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-1)\cdot 2^x+(m-6)\cdot 2^{-x}$

intersectează axa Ox într-un punct care are coordonatele numere raționale.

4. La jocul de şah se acordă 1 punct pentru o partidă câştigată, 0,5 puncte pentru o remiză şi 0 puncte pentru înfrângere. Un şahist a jucat 100 de partide de şah şi a acumulat 40 de puncte. Care este diferenţa dintre numărul de partide pierdute şi numărul de partide câştigate ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XI-A

1. a) Demonstraţi că dacă X şi $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot Y = I_3$, atunci $Y \cdot X = I_3$.

b) Demonstraţi că dacă $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $A + B = 3AB$, atunci $(3A - I_3)(3B - I_3) = I_3$ şi $A \cdot B = B \cdot A$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie care verifică inegalitatea $\left|\cos x - 2^x + f(x)\right| \le x^2, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Demonstraţi că:

a) $f(0) = 0$;

b) *f* este continuă în punctul $x = 0$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot A^t = B \cdot B^t = I_3$. Să se demonstreze că cel puţin una dintre matricele $A + B$ sau $A - B$ este singulară (A^t este transpusa matricei *A*) .

4. Un călător parcurge dus – întors acelaşi traseu de lungime *d* în două zile, de fiecare dată în acelaşi interval de ora, 8^{00} – 12^{00} . În prima zi (la dus) o funcţie continuă şi monotonă $f : [8,12] \to [0, d]$, exprimă distanţa parcursă de călător pe traseu, iar a doua zi (la întors) o altă funcţie continuă şi monotonă $g : [8,12] \to [0, d]$, exprimă distanţa parcursă de călător pe traseu, în sens invers, până la fiecare moment orar $t \in [8,12]$. (în care fracţiunile de oră se exprimă zecimal). Considerăm funcţia $F : [8,12] \to \mathbb{R}, F(t) = f(t) + g(t) - d$.

a) Calculaţi $F(8)$ şi $F(12)$.

b) Dacă $t_0 \in [8,12]$ şi $F(t_0) = 0$, demonstraţi că la momentul t_0 călătorul se află în acelaşi loc pe traseu, atât la dus cât şi la întors.

c) Demonstraţi că există un punct pe traseul parcurs în care călătorul s-a aflat la aceeaşi oră atât la dus cât şi la întors.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. Într-un mediu de cultură sunt, la momentul $t_0 = 0$, 300 bacterii. Numărul de bacterii la momentul $t > 0$ este dat de funcția $n:[0,\infty)\to(0,\infty), n=n(t)$, funcție care satisface relația $n'(t)=\frac{1}{10}\cdot n(t), (\forall) t\geq 0$.

a) Determinați $n(t)$.

b) Demonstrați că pentru $t\geq 20$, numărul bacteriilor din mediu este mai mare decât 2015.

2. Se considera mulțimea $G=\left\{X\in M_2(\mathbb{Z}_3) \mid X=\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ \hat{2}\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}\right\}$

a) Să se demonstreze că $P+Q\in G$ şi $P\cdot Q\in G, \quad \forall P,Q\in G$;

b) Să se rezolve ecuația $X^2=I_2, X\in G$;

c) Să se demonstreze ca produsul tuturor matricelor din G, diferite de O_2, nu depinde de ordinea lor şi să se calculeze acest produs.

3. Se considera polinomul: $f_n=1+\frac{X}{1!}+\frac{X(X+1)}{2!}+...+\frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}\in\mathbb{C}[X], n\in\mathbb{N}$ şi matricea $A\in M_3(\mathbb{C})$ cu $A^4=O_3$.

a) Să se demonstreze că $f_n=\frac{1}{n!}(X+1)\cdot(X+2)\cdot...\cdot(X+n)$ pentru oricare $n\in\mathbb{N}$.

b) Să se demonstreze că $\det(I_3-x\cdot A)=1, \forall x\in\mathbb{C}$,

c) Să se calculeze $\det(f_3(A))$,

4. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cdot\ln x$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=ax^2\ln x+bx^2$ să fie o primitivă a lui f.

b) Să se determine aria suprafeței cuprinsă între graficul lui f, axa (Ox) şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=e$.

c) Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to[0,\ln 2], f(x)=\ln(1+tgx)$. Să se calculeze $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*